Matemáticas, economía, crisis

Juan José R. Calaza y Guillermo de la Dehesa

Un artículo aparecido en *Wired* en 2009 evocaba «la fórmula que asesinó a Wall Street» en referencia a la ecuación de Black-Scholes (BS) derivada del modelo de Black-Scholes-Merton (BSM). Antes de sacar conclusión alguna hay que entender la ecuación, sobre todo porque el tema se presta a excesos de lenguaje.

La ecuación *asesina* –según *Wired*– intenta evacuar el riesgo inherente a las inversiones y lo consigue bastante bien. Paradójicamente, esa proeza técnica relajó hasta la temeridad el instinto de confianza favoreciendo el crecimiento explosivo del mercado de productos financieros derivados. Estos son, esencialmente, apuestas respecto al comportamiento futuro de activos reales (inmuebles, materias primas, etc.) o financieros (acciones, obligaciones, tipos de cambio de divisas, etc.) a los que se adosan en cascada otros derivados progresivamente complejos. Los especialistas de estos productos tienen, entre los *traders*, un perfil especial, marcadamente cuantitativo. En el sector se les conoce por *quants* (analistas cuantitativos).

Ya en 2008, el mismísimo Michel Rocard, que no es un cualquiera –ex *Premier Ministre* de la elitista *casta* de *enarcas* franceses– se singularizó afirmando que los matemáticos que enseñan las técnicas financieras incurren en *crimen contra la humanidad* por las crisis que provocan. Este tipo de terrorismo verbal no resulta infrecuente en nuestros días y se hace extensivo a la incapacidad de los economistas para anticipar las crisis e incluso establecer previsiones a corto plazo sin error. Es cierto que en ocasiones las críticas no carecen de fundamento echándose en falta más honestidad intelectual y autocrítica en economistas y matemáticos en lugar de la parafernalia de *las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales estocásticas*, ínsitas en modelos macro-econométricos. Modelos que amparan una ideología aureolada de la violencia simbólica de las matemáticas, al servicio de *expertos* que justifican políticas económicas abocadas al fracaso.

La opacidad técnica de los productos financieros derivados mete miedo al común de los mortales ya que serían, según algunos, las palancas esenciales de una economía casino en manos de especuladores. No obstante, debemos recordar, que no hay producto financiero que pueda desarrollar su uso si no es ante todo un instrumento de cobertura del riesgo. Por sofisticado e inextricable que sea para los no especialistas el cálculo matemático que los evalúa, son instrumentos financieros útiles.

En las críticas de Michel Rocard subyace un juicio de intenciones a la economía de mercado como si ésta, de forma impersonal y abstracta, se sirviese de las matemáticas en aras de expoliar a la gente sin tener en cuenta el riesgo que los productos matemático-financieros generan. Se olvida frecuentemente que también en los países soviéticos se utilizaron profusamente modelos matemáticos sin que los logros de la planificación superasen a los de las economías descentralizadas. Es cierto que la URSS no conoció crisis financieras pero los geniales matemáticos al servicio del régimen tampoco alumbraron dinámicas económicas virtuosas superiores a las de los países occidentales. Y ello es así porque cualquier economía industrial, planificada o descentralizada, es demasiado compleja para poder encapsularla en ecuaciones. Que, todo hay que decirlo, no resultan completamente inútiles.

Sin que el uso de las matemáticas sea neutro, el problema transita fundamentalmente por otros canales. Sabemos por experiencia que el error cometido en el diseño del euro se asentó en una hipótesis que no se ha verificado: el modelo económico alemán era ejemplar y transferible a toda Europa. Se constata asimismo una ideología similar profundamente anclada en el inconsciente de los economistas del FMI y asimilados: el modelo norteamericano es extensible al resto del planeta. Dicho de otra forma, lo que es bueno para Wall Street es bueno para EE.UU. y lo que es bueno para EE.UU. es bueno para la economía mundial. Y pertrechados de esa ideología, los consejeros económicos del eje Wall Street-Washington organizaron a comienzos de este siglo la desreglamentación bancaria y financiera vigente, propiciando la propagación casi inmediata de choques financieros al sector real cuando se produce un cambio en las anticipaciones de los agentes. Anticipaciones que aparecen como racionales al autorrealizarse. En un entorno económico de equilibrios múltiples y anticipaciones autorrealizables, pequeños choques o pequeñas modificaciones de las anticipaciones con efecto contagio –que en el pasado tenían consecuencias menos traumáticas y podían corregirse a rebufo de políticas de intervención o por medio de estabilizadores automáticos– tienen ahora efectos acumulativos devastadores. Ese es el verdadero problema ¿Lo exacerba la estructura matemática de los productos financieros? En ocasiones sí pero el uso atinado de las matemáticas en economía y finanzas es rentable para la sociedad.

En 1999, sospechando lo peor, un matemático de Boston, Dan diBartolomeo, llegaba a la conclusión de que los rendimientos espectaculares que obtenía el fondo de Robert Madoff eran inverosímiles. En opinión de diBartolomeo existían dos vías para el fraude. O Madoff practicaba el *front running* (delito de iniciado que consiste en que el agente coloca órdenes en beneficio propio antes de las de su principal) o bien, con mayor probabilidad, había montado la mayor cadena Ponzi de la historia. A pesar de que diBartolomeo y Markopolos, otro financista y matemático, suministraron pruebas cuantitativas al gendarme de la Bolsa de Nueva York (SEC, del inglés *Securities and Exchange Comission*) –en los años 2000, 2004, 2005, 2007 y 2008– no se tomó ninguna medida hasta que al gran estafador se le derrumbó la pirámide. Es decir, en general no se trata tanto de uso excesivo y mal adaptado de las matemáticas como de mercados descontrolados.

En esta colaboración intentaremos presentar un panorama del uso de las matemáticas en economía y en finanzas en particular. Excluiremos la *Teoría de juegos* y los modelos de equilibrio general con *punto fijo* que requieren tratamiento específico.

De la metodología

La mejor forma de no dar pie a un debate es hacerlo pasar por muy técnico. Pero hay otra forma más insidiosa de acallarlo, y casi tan eficaz, consistente en ceder la palabra a todo el mundo –a Michel Rocard, verbigracia– para que la cacofonía se instale en el ambiente y nadie se entere de nada. En economía, a la par que en medicina, se cae en dos extremos: el de la tecnicidad a ultranza y el de barra de bar. Conviene aclarar al respecto que la física cuántica, la cosmología, la biología computacional, la climatología y la economía comparten la dificultad de que el objeto es más complejo que los medios de que se dispone para estudiarlo. En realidad, resulta técnicamente más fácil elaborar modelos matemáticos aplicados a los átomos que al comportamiento del *Homo sapiens*.

Los científicos parten de hipótesis para explicar observaciones y después comprueban empíricamente las hipótesis sirviéndose de algún test adecuado. Aunque en las ciencias físicas o naturales se observan irregularidades –terremotos, eclipses, *olas centenarias*, erupciones volcánicas, nevadas en verano, maremotos, etc.– los test son posibles gracias a la regularidad de la mayoría de fenómenos estudiados. Cuando la regularidad es la norma –por ejemplo, la rotación de la Tierra sobre su eje y alrededor del Sol o el flujo y reflujo de las mareas– los tests permiten refutar o confirmar las hipótesis.

Siguiendo la senda metodológica de las ciencias que la precedieron, la ciencia económica también levanta teorías y construye modelos económico-matemáticos para explicar la interacción y relaciones causales de las variables entre ellas. Pero desde Galileo la ciencia se caracteriza más por predecir que por explicar. A veces se confunde el modelo económico con el modelo matemático porque ambos son isomorfos (conservan las mismas operaciones al compartir la estructura algebraica). La manipulación de la estructura del modelo teórico permite encontrar frecuentemente el modelo matemático que tenga otra similar, lo cual justificaría el isomorfismo. Todo economista sabe que manipulando el modelo teórico –torturando la razón convenientemente en el lecho de Procusto de la ortodoxia dominante– casi siempre encontrará un modelo matemático para casarlo en isomorfismo. Sin embargo, por diversas razones, no siempre es fácil efectuar los tests que validan empíricamente el modelo teórico a pesar de tener un elegante esqueleto matemático. Los buenos economistas son conscientes de la ficción y no se enamoran del modelo.

Comprobar la fiabilidad de las ruedas de un automóvil en repetidos tests de adherencia o resistencia entraña una facilidad que no se da en economía. El mayor obstáculo proviene de que la economía muestra escasas regularidades, o son distantes en el tiempo, junto con la heterogeneidad de los elementos que se estudian. En cualquier caso, de los seguros a la energía, pasando por las telecomunicaciones y el deporte hasta las autopistas o la emisión de anhídrido carbónico, el comercio de droga, el precio de un billete de tren o de un hectolitro de agua, abundan los campos donde los economistas matemáticos son capaces de dar respuestas atinadas a los problemas que les plantean.

Sucede que corre por ahí una *boutade* maledicente que define al economista como alguien que os dirá mañana por qué no sucedió hoy lo que había previsto ayer. Puestas así las cosas, algunos, quizás aleccionados por la tradición de la China imperial –que obligaba a cada médico a tener perpetuamente encendida en la puerta de la consulta una vela por cada paciente que se le hubiese muerto– exigen la publicidad de los errores de los economistas ¿Qué errores? Si se refieren a las previsiones, estimaciones cifradas de variables económicas que se acompañan siempre de un margen de error, sólo atañen al corto plazo; más allá, para las proyecciones de medio o largo plazo, se entra en la programación/planificación o la prospectiva. Pero incluso en el corto plazo las previsiones económicas son mucho más difíciles que los diagnósticos médicos, los cuales, aun acertando, no pueden evitar el fallecimiento del paciente.

El ámbito predictivo de la ciencia económica, que dispone de una infraestructura matemática tan sofisticada como la de la física, ofrece pocas certezas y las conclusiones cifradas fiables y definitivas constituyen la excepción. Lejos de echar las campanas al vuelo hay que aceptar que la ciencia económica propone, esencial y modestamente, un marco de reflexión en el que no siempre impera el consenso. Los modelos teóricos, puras simplificaciones de la realidad, son incapaces de fundamentar adecuadamente situaciones de equilibrios múltiples ni anticipar cambios en los comportamientos de los agentes y en las asimetrías de información. Pasarán muchos años, si es que alguna vez se consigue, antes de construir modelos que tomen en cuenta los cambios de estrategia de los agentes y las variaciones y asimetrías informativas y conductuales corrientes y futuras. Empeorando las cosas, la racionalidad teórica del *Homo economicus* tiene poco que ver con la real del *Homo sapiens*. En este sentido, la modelización económica es más difícil incluso que la del clima. Todo ello complica enormemente el oficio del economista. Las previsiones son difíciles y los modelos macroeconómicos basados en anticipaciones racionales harto rústicos en sus previsiones.

El marco de reflexión que ofrece la ciencia económica sólo es válido en situaciones normales, cuando la linealidad es la tónica dominante de manera que el pasado se prolonga en el futuro sin saltos ni discontinuidades. Las previsiones funcionan, siempre con un intervalo de error, cuando hay cierta continuidad o linealidad. Con la globalización/mundialización y los contagios de mercados que impulsa, en lugar de evolucionar suavemente de un equilibrio a otro, el entorno económico exhibe situaciones de equilibrios múltiples: se puede saltar brutalmente de un equilibrio real y financiero a otro. No porque el entorno objetivo de la economía se haya transformado –ocurre, por ejemplo, como consecuencia de una guerra o una mala cosecha– sino, simplemente, porque ha habido modificaciones en las anticipaciones. *Ex post*, este equilibrio diferente confirma la anticipación que deviene autorrealizable. En un entorno de equilibrios múltiples y anticipaciones autorrealizables, pequeños choques o pequeñas modificaciones de las anticipaciones con efecto contagio pueden desencadenar crisis graves.

Matemáticas y planificación

Si hubiesen alcanzado plenamente sus objetivos las órdenes de bombardear –durante el bloqueo de Leningrado– la *Caravana de la vida*, que atravesando el helado lago Lagoda aprontaba víveres a los asediados, Leonid Kantorovich habría ido al fondo al volante de un camión. En efecto, después de haberse doctorado en matemáticas a los veinte años y obtener la cátedra a los veintidós, Kantorovich era el responsable de la caravana. Puro producto de la escuela matemática rusa, especialista en programación lineal y análisis funcional, a la par que Pontryagin –otro genio, invidente desde los catorce años– el astuto Kantorovich minimizó las pérdidas de camiones sometidos a bombardeos calculando la velocidad y distancia óptima que debían respetar entre ellos teniendo en cuenta las condiciones del hielo sobre el que circulaban. No es menos digno de admiración que, en lugar de quedarse en su despacho haciendo cálculos y dando órdenes, Kantorovich condujera un camión bajo los bombardeos.

Con hombres así los soviéticos ganaron la guerra. Ganaron la guerra convencional pero perdieron la guerra fría habida cuenta de que los modelos de planificación teorizados pecaban de rudimentarios respecto a la complejidad de los objetivos del Gosplan. A pesar de la valía de los matemáticos empleados en la tarea, la dinámica económica es demasiado compleja para sintetizarla idealmente en ecuaciones.

Otro de los logros técnicos de Kantorovich consistió en aplicar la programación lineal como método de asignación óptima de recursos sectoriales en el seno de una economía socialista planificada. Estos trabajos, que olían a descentralización de economía de mercado, estuvieron a punto de llevarlo a la cárcel en dos ocasiones, salvándose por su colaboración en el programa nuclear soviético. Los modelos de Kantorovich intentaban reconciliar Pareto con la planificación soviética. En 1975 recibió el Premio del Banco de Suecia en Ciencias Económicas en memoria de Alfred Nobel, junto con el holandés Tjalling Koopmans.

Esquematizando, los economistas de la época consideraron que la trayectoria de un misil y la del crecimiento de una economía podían calcularse con los mismos instrumentos matemáticos (máximos/mínimos de Pontryagin y ecuaciones de Massé/Bellman). Poder sí se podía pero mientras los misiles llegaban a destino, como estaba previsto, las economías no respetaban las previsiones. Ahora sabemos que no sólo fracasó el modelo del Plan soviético sino también el francés y el español. A pesar de las tasas de crecimiento que se observaron por entonces y de la tendencia económica sin grandes sobresaltos, hasta 1973, es un error atribuir los logros a los planes. Simétricamente, yerra quien piensa que el mal uso de las matemáticas en finanzas ha llevado a la crisis financiera si bien su uso no es completamente neutro.

Teoría financiera contemporánea

La teoría financiera de los últimos sesenta años se ha levantado sobre tres pilares: a) maximización de la esperanza de utilidad de los actores que intervienen en los mercados financieros; b) hipótesis de ausencia de arbitraje; c) eficiencia de los mercados financieros. Sobre esas bases se desarrolló el siguiente corpus teórico. Teoría de diversificación de cartera (Markowitz, 1952); modelo de equilibrio general de mercados (Debreu, 1953); modelo CAPM de equilibrio de activos financieros (Sharpe, 1964); modelo de evaluación de opciones (Black y Scholes, 1973; Merton, 1973); modelo del impacto del cambio de cartera sobre el mercado mediante un enfoque bayesiano aplicado al modelo de Markowitz (Black y Litterman, 1990); la Var (*Value at Risk*) es adoptada por el mercado como medida del riesgo en los años noventa. La ecuación de Black-Scholes no ha resultado baladí, el matemático Ian Stewart la incluye en su libro *17 Equations that Changed the World*.

Con anterioridad a todos estos modelos, Louis Bachelier, en su tesis de doctorado de matemáticas (*Théorie de la spéculation*, 1900) bajo la dirección de Poincaré, fue el precursor en plantear las cotizaciones de la Bolsa en forma de paseo aleatorio, al tiempo que propuso una fórmula de cálculo del precio de las opciones muy similar a la de Black-Scholes-Merton. Al modelizar las variaciones de los precios en Bolsa como variaciones aleatorias independientes, Bachelier avanzó una propuesta bastante revolucionaria para una época en la que la ciencia estaba inmersa en el determinismo de Laplace aunque Poincaré ya lo había puesto en entredicho: «El mercado sólo obedece a una ley: la ley del azar». Años más tarde se descubriría que la formalización del movimiento browniano de Einstein (1905) era similar a la utilizada por Bachelier con relación al paseo aleatorio de los valores de las acciones.

Bachelier consideró en su modelo seminal que el precio de una acción o un índice siguen un proceso browniano análogo al movimiento errático de las partículas microscópicas que sufren los choques aleatorios de las moléculas del entorno en el agua, por ejemplo, o en una habitación cerrada. Este modelo abrió la puerta en los años setenta del pasado siglo (al mismo tiempo que el nacimiento del mercado de opciones de Chicago) a la posibilidad de considerar contratos de seguros contra las fluctuaciones del mercado –seguros que se conocen como productos derivados u opciones– y de valorarlos a la manera como los actuarios calculan las primas en los seguros.

En el modelo de Bachelier las variaciones del precio de una acción en intervalos de tiempo sucesivos –por ejemplo, diariamente desde que se abre hasta que se cierra la Bolsa– son variables independientes que siguen una ley normal. La gráfica de la función de densidad de una distribución normal tiene forma acampanada y es simétrica respecto a un determinado parámetro; además, las «colas» decrecen muy rápidamente, más que exponencialmente, a ambos extremos de la media. A izquierda y derecha del rendimiento medio se reagrupan simétricamente la mayoría de los rendimientos por defecto o exceso. Los valores extremos son por tanto más raros y se alejan mucho de la media. Para las acciones cotizadas en Bolsa el riesgo se evalúa en relación a la dispersión de valores en torno a la media (se habla de desviación estándar o de varianza, que es su cuadrado) Así, dado el curso medio de una acción (el rendimiento) la curva de Gauss determina una desviación estándar (el riesgo)

Esta modelización permite que el riesgo de una cartera pueda medirse por un índice simple, su volatilidad, definida como la desviación estándar de los rendimientos del día. El indicador mide la magnitud de las fluctuaciones típicas. Ahora bien –y entender este punto es crucial–, si la finalidad es cuantificar el riesgo de una cartera, no son las variaciones típicas las que deben tomarse en cuenta sino las variaciones extremas, las que llevan a enormes ganancias pero también a pérdidas espectaculares. En este sentido, la desviación estándar no nos informa respecto a las fluctuaciones extremas que están representadas en las colas de la distribución de probabilidad: ganancias, a derecha, pérdidas, a izquierda.

Un ejemplo muy sencillo muestra hasta qué punto los modelos son engañosos en cuanto a la sub-evaluación del riesgo. Si suponemos que los rendimientos diarios siguen una ley normal, la probabilidad de que un rendimiento observado se desvíe cuatro desviaciones estándar de su media es de 0,01 por ciento, evento que se produce cada 63 años. Si se reemplaza la distribución normal por una distribución de Student de parámetro 3, de la misma desviación estándar, la misma probabilidad pasa a 0,62 por ciento, evento que se observa dos veces al año. Constatamos que las hipótesis respecto a la distribución de rendimientos tienen consecuencias importantes para la toma de conciencia ante el riesgo.

¿Cómo se comparan estas cifras con el comportamiento del mercado? La serie bianual de los rendimientos diarios del índice Dow Jones (2007 y 2008) contienen 16 observaciones cuya amplitud sobrepasa cuatro desviaciones estándar, lo cual da una proporción del 0,78 por ciento, un poco más que la ley de Student y 100 veces más que la ley normal. Esto es, con la ley normal sub-evaluamos el riesgo, con la de Student nos aproximamos y con una distribución con colas «espesas», como la de Levy, estamos cerca de la realidad. En consecuencia, con leyes estadísticas apropiadas los inversores hubieran perdido menos dinero habida cuenta de que no hubieran subestimado tanto los riesgos como sucede con la ley normal.

Uno de los primeros desacuerdos con los fundamentos de los modelos basados en la ley normal provino de Benoît Mandelbrot. En el frío invierno de 1962, en Pittsburgh, Mandelbrot (1924-2010), por entonces desconocido matemático francés, de origen polaco, presentó en el congreso anual de econometría los resultados obtenidos después de haber estudiado las variaciones del curso del algodón de una serie de sesenta años. Los resultados cayeron como una bomba entre los especialistas de la finanza: los cursos no se distribuían siguiendo una ley normal. Por el contrario, en completa oposición a lo que propugnaba la teoría, las cotizaciones del algodón seguían una ley de potencia en las que los valores extremos son mucho más frecuentes que en la ley normal-Gauss. Con las leyes de potencia las situaciones de equilibrio son la excepción, la inestabilidad es la norma y los valores extremos son frecuentes: azar brutal (*hasard sauvage*) en la terminología de Mandelbrot. A esos valores extremos (y raros) se les conoce actualmente en finanzas como *cisne negro*.

El comportamiento en términos de azar brutal/violento no se compadece con el comportamiento asimismo aleatorio, pero continuo y bastante benigno, del movimiento browniano (azar benigno/

hasard sage). Mandelbrot sugirió reemplazar el movimiento browniano por una clase de procesos aleatorios que reflejasen ese carácter perverso, salvaje: los procesos de Levy. Dichos procesos, estudiados por el matemático francés Paul Levy (profesor de Mandelbrot) reflejan una evolución discontinua de precios, puntuada de saltos.

Las reservas manifestadas por Mandelbrot respecto a ley normal fueron acogidas con escepticismo en los años sesenta del pasado siglo y sin embargo hoy día figuran en todos los manuales de econometría financiera.

Subestimación del riesgo

La curva de Gauss se observa en numerosas situaciones –siempre y cuando los fenómenos o acontecimientos sean independientes unos de otros– tanto en las ciencias de la naturaleza como en física, juegos de azar y loterías o en las ciencias sociales y, según la teoría de la eficiencia de los mercados, en los cursos en Bolsa. En función del binomio rendimiento-riesgo, para el que los economistas de Chicago han propuesto una medida, un inversor escogerá la cartera que quiere comprar.

No todas las formas de riesgo se reducen a la curva de Gauss. Es el caso, por ejemplo, cuando aparecen «efectos de memoria» y «efectos de interacción». En esas circunstancias, se sale del universo gaussiano, bien segmentado, reagrupado en torno a una media, para entrar en el de los extremos. La media, aunque pueda calcularse, carece de significado habida cuenta de la importancia de la dispersión de datos (la desviación estándar es infinita, en la jerga de los estadísticos).

Las leyes de potencia se encuentran en toda la economía y especialmente en los mercados financieros, en la distribución de la renta o en la distribución de la talla de las ciudades. En su artículo sobre el algodón, Mandelbrot las sacó a la luz por primera vez en finanzas. Paul Cootner, su editor, declaró: «Si Mandelbrot tiene razón, la casi totalidad de nuestros instrumentos estadísticos están obsoletos». Es especialmente cierto de la sacrosanta eficiencia de los mercados, es decir, de la idea de que los precios reflejan a cada instante toda la información disponible: en el mundo de las leyes de potencia los intervinientes no tienen un acceso igual a la información. Además, los fenómenos de memoria generan una dinámica intrínseca a los mercados financieros (los aumentos siguen a los aumentos, las bajadas a las bajadas) que no es reductible a la llegada o no de nuevas informaciones exteriores al mercado. Las interacciones entre los diferentes actores crean tendencias autónomas de mimetismo, que acarrean las burbujas.

La teoría moderna de la finanza procederá durante su desarrollo a distintos lavados de cara pero sin renunciar a las distribuciones normales. Se ampliará a la base la curva de Gauss para tomar en cuenta los desvíos importantes y los nuevos modelos integrarán los efectos de memoria. Pero todo ello dentro del marco gaussiano como prueban los productos financieros desarrollados bajo la inspiración de David X. Li –matemático de J. P. Morgan, estrella de las finanzas– que han servido para elaborar las *subprimes* y que se desintegraron en cuanto el precio del inmobiliario bajó fuertemente de manera inesperada (Guillermo de la Dehesa, *La primera gran crisis financiera del siglo XXI*, 2009).

La visión normal/gaussiana limita nuestra perspectiva del riesgo en lo que concierne a los acontecimientos extremos, el *cisne negro*, amparando la construcción de modelos y diseños de productos financieros que «explotan» en pleno vuelo cuando se producen choques mayores imprevistos. Dicho esto, el modelo gaussiano funciona cuando no hay crisis, cuando hay estabilidad. En definitiva, hay que aprender a convivir con el *cisne negro*, evaluar los riesgos con mayor sentido de la realidad sabiendo la probabilidad de ruina es elevada y que la vuelta al equilibrio de los mercados está lejos de ser automática. Sabedores de que las burbujas son inevitables, abandonar el marco gaussiano por enfoques que integraran mejor el riesgo, como intentó Mandelbrot, permitiría construir un sistema financiero más resistente que pudiese absorber los choques en lugar de amplificarlos sin que se convirtiese por sí mismo en un factor de riesgo para toda la economía.

A partir de 1970, Mandelbrot empezaría a ser conocido en el panorama matemático mundial como padre de los fractales pero sus trabajos respecto a los mercados financieros encontrarían poquísimo eco en la comunidad académica a pesar de que los profesionales de los mercados financieros sabían que las cosas no eran tan sencillas como predecían los académicos proponentes de la ley normal. Fue, precisamente, un discípulo de Mandelbrot, Nassim Nicholas Taleb, quien popularizaría la expresión *cisne negro* en su bestseller *The Black Swan* (2007).

Al ignorar o subestimar la verdadera naturaleza del riesgo inherente a la diversificación de carteras de valores mobiliarios y a los productos financieros de reciente factura, la finanza teórica –es decir, matemática– abocó a la crisis de las *subprime*. Instrumentos creados en principio para cubrir riesgos financieros o económicos individuales acabaron generando una crisis sistémica que desbordó perversamente a la esfera real con desestabilizadores efectos de retroacción entre ambos niveles. No es de extrañar que a partir del 15 de septiembre de 2008, quiebra de Lehman Brothers, los trabajos de Mandelbrot hayan aflorado con inusitado prestigio.

Instrumentos de cobertura y vectores de inestabilidad

Los productos derivados u opciones constituyen un insustituible instrumento financiero que permite a numerosos operadores del comercio internacional y de las finanzas suscribir pólizas particularmente eficaces al transferir el riesgo a terceros. Asimismo, en ciertos casos, los mercados de productos financieros favorecen la difusión de la información relativa a la calidad de los activos subyacentes que cubren. Sin embargo, su naturaleza ampara estrategias especulativas especialmente desestabilizadoras que acaban rompiendo el frágil equilibrio de los mercados.

La crisis financiera del 2008 reveló la extrema peligrosidad de algunos derivados cuando se negocian fuera de la Bolsa (OTC del inglés *Over-The-Counter Market*) mercado menos reglamentado, en el que se concluyen transacciones directamente entre vendedor y comprador vía las redes electrónicas de telecomunicaciones. A ello hay que añadir que existen en los mercados financieros mecanismos alejados de la esfera real. La recurrencia de las burbujas especulativas o el vuelo vertical del título de una empresa que pierde efectivos, sometida a un proceso quirúrgico de reestructuración, constituyen ejemplos típicos.

La especulación, estabilizadora o no, no necesita la existencia de un mercado de derivados para despegar, como bien sabemos por incontables ejemplos históricos, pero la facilitan. Un exceso de confianza, euforia especulativa al alza, debida al comportamiento mimético de los agentes, aboca antes o después a contagios de pánico que desembocan en *krachs* y crisis financieras. Para que así sea hay que reconocer un coste de la información respecto al valor objetivo de un activo y su corolario: la presencia de agentes informados y no informados en los mercados. Y dado que la información representa un coste lo más racional es recurrir al comportamiento mimético: seguir al que va delante. En la constitución de las cadenas miméticas la dimensión temporal será determinante: el primero que llegue, o el primero que salga, será el que aprovechará mejor la naciente ola especulativa. La febrilidad de los agentes y su participación en la formación de la burbuja no reposa en el conocimiento de los valores fundamentales del título sobre el que se ejerce la especulación, que conlleva un coste, sino sobre expectativas autorrealizables por naturaleza inestables y por tanto imprevisibles.

Si la historia de la especulación puede explicarse sin los productos financieros derivados cada innovación en la panoplia de productos financieros estimula nuevas ambiciones especulativas: puede haber especulación sin productos derivados pero no hay productos financieros derivados que antes o después no lleven a la especulación. Toda innovación en este terreno estimula nuevas estrategias especulativas que provocan a la postre una crisis financiera. Ya es *common knowledge* en la profesión que la importancia creciente que tomaron, primero, los activos titulizados *via* los CDO (del inglés, *collaterized debt obligations*) y, después, los contratos de futuros, *credit default swaps,* estuviesen en el origen del cataclismo financiero iniciado con la caída de Lehman en el 2008. Y esto es grave. Porque, a diferencia del jugador de ruleta que arriesga su patrimonio personal, al especulador profesional, gracias a los productos derivados, se le abre la posibilidad de apostar sumas colosales que no posee. Además, a diferencia de un juego de azar, el resultado de una apuesta especulativa no es estrictamente independiente de la estrategia planificada por el especulador toda vez que el mimetismo de comportamientos, conjugado a las tomas de posición amplificadas por los productos derivados, lleva a consecuencias colectivamente dramáticas por cuanto la ruina financiera se contagia entre los actores del mercado y acaba arrollando a la esfera real.

Si bien es cierto que los productos financieros derivados favorecen la cobertura de riesgos individuales también pueden, por el contrario, incrementar no solamente el riesgo de inestabilidad financiera a la escala de un mercado sino asimismo el riesgo sistémico.

Matemáticas de los productos financieros

Una opción –de compra, por ejemplo, aunque también puede ser de venta– es un contrato que permite la transferencia de un riesgo, o volatilidad del precio de un activo, del inversor (el que compra la opción) al vendedor (generalmente un banco especializado o un corredor) Más concretamente, una opción de compra respecto a un activo, (llamado subyacente: moneda, materias primas, acción, etc.) es un contrato que permite a su tenedor comprar el activo a una fecha dada (vencimiento) a un precio fijado en la fecha del contrato. Para honrar el contrato al vencimiento, el vendedor de la opción debe elaborar una estrategia para cubrirse contra las fluctuaciones del curso del activo subyacente ¿Cuál es el «precio justo» a pagar por el contrato que da derecho a la opción y qué estrategia de cobertura debe diseñar el vendedor? En 1973, Fisher Black y Myron Scholes, en binomio, y Robert Merton, que colaboraba con ellos ocasionalmente, propusieron una respuesta válida siempre y cuando el precio del activo subyacente pueda representarse por un movimiento browniano geométrico.

Ocurre que la complejidad de los productos financieros crece: la finanza matemática resulta insoslayable. Inevitablemente, los productos financieros se montan sobre un esqueleto matemático. Actualmente, casi todas las facultades de matemáticas de las mejores universidades del mundo albergan un departamento de finanzas o como mínimo dispensan formaciones diplomadas aplicadas a la finanza. Esta nueva especialidad se desarrolló a partir de los avances en análisis estocástico que permitieron combinar el análisis matemático clásico y la teoría moderna de probabilidades surgida de la genial mente de Kolmogorov hace ochenta años. No obstante, la sofisticación y tecnicismo de esta disciplina –comparable al de la física– no debe hacernos perder de vista que los problemas suscitados por la gestión del riesgo distan de estar resueltos.

Entre los avances en análisis estocástico sobre los que se levantó el complejo edificio de la teoría financiera hay que citar los trabajos de Norbert Wiener (1894-1964) que elaboró una formalización rigurosa del movimiento browniano (bautizado después proceso de Wiener si bien en un principio algunos probabilistas, como Feller, lo denominaban de Bachelier-Wiener). El francés Paul Levy (1886-1971) exploró sus características y dejó su nombre a procesos estocásticos más generales susceptibles de presentar discontinuidades o saltos. Más tarde, el cálculo aleatorio se desarrolló gracias a la teoría de la integral estocástica del japonés Ito (1915-2008) Finalmente, Joseph Leo Doob (1910-2004) alumbró el concepto de martingala abundantemente utilizado en finanzas. De consuno, Doob estableció con el matemático francés Paul-André Meyer (1934-2003) los fundamentos de la teoría moderna de las semi-martingalas una de cuyas aplicaciones es la modelización de procesos que representan la evolución de los precios de activos financieros.

Pertrechados de estos instrumentos técnicos, economistas, físicos y matemáticos pudieron atacar las cuestiones financieras a partir de la década de los setenta del pasado siglo coincidiendo con la apertura en Chicago del primer mercado de productos derivados/opciones que tenían como subyacentes materias primas. Así, los susodichos Black, Scholes y Merton se hicieron celebres gracias a su *Option Pricing Formula* destinada a evaluar los precios de las opciones y calcular una cobertura dinámica del riesgo. Esta fórmula explícita les valdrá, en 1997, el equivalente del Nobel de Economía a Scholes y a Merton (Black, el que más merecía el premio, había muerto en 1995) y aún constituye hoy día el instrumento fundamental del cálculo financiero y de su teoría aunque en la práctica se prefiera el modelo discreto de Cox-Rubinstein.

El éxito de la fórmula se debió en gran parte a que los precios calculados teóricamente a partir del modelo eran coherentes con los que hasta entonces se habían calculado empíricamente basándose en la experiencia de varios años en el oficio. No obstante, a pesar de su aceptación generalizada, las hipótesis de base del modelo Black-Scholes-Merton son demasiado fuertes y generalmente alejadas de la realidad. Por ejemplo, el modelo supone la existencia de un mercado financiero ideal, con una liquidez fluida y sin racionamiento, sin costes de transacción (compras o ventas). A un mercado de estas características se le considera «completo» en teoría financiera, concepto que traducido al lenguaje corriente significa que los bancos que venden los contratos que dan derecho a las opciones pueden poner en pie una estrategia de cobertura perfecta del riesgo.

Ahora bien, el mercado real es típicamente incompleto: el cálculo de la cobertura dinámica del riesgo es con frecuencia un problema abierto. El caso de los productos derivados que tienen como subyacentes créditos, tales las «subprime» americanas, constituyen un ejemplo paradigmático de crisis a la que puede abocar a la ausencia de cobertura desde el momento en que se encuentra adosada a una complejidad técnica creciente, en aras de satisfacer montajes financieros arborescentes, y sobre todo a una deriva especulativa perpetua. Por tanto, uno de los desafíos mayores que encaran los especialistas es tomar en cuenta de forma más realista los diferentes riesgos y refinar los instrumentos matemáticos a fin de evaluar con mayor precisión las medidas del riesgo y en especial los «riesgos extremos». Ello debería llevar a un mejor conocimiento de las fluctuaciones de los mercados y en particular a las fluctuaciones repentinas o de carácter excepcional. De donde, por ejemplo, las investigaciones centradas en los procesos de Levy y el control estocástico de estos procesos. En paralelo, la calibración de los modelos constituye asimismo una etapa importante y necesita nuevas técnicas de optimización. Esta etapa consiste en ajustar la dinámica de los activos subyacentes a partir de las opciones cotizadas en el mercado, lo cual, si bien se mira, constituye el problema inverso del problema del cálculo de los precios de las opciones.

Eficiencia informacional

El concepto de eficiencia de los mercados financieros comporta, al menos, tres dimensiones: eficiencia informacional, comportamiento racional de los actores y eficiencia organizacional/funcional.

Lo que parecía un hecho establecido y generalmente aceptado tanto por teóricos como por profesionales, la hipótesis de la eficiencia de los mercados financieros, ha sido cuestionado estos últimos años a la luz de numerosos estudios y anomalías que operan en su contra.

La eficiencia informacional del mercado es más o menos la transposición a los mercados financieros del viejo concepto de mercado perfecto del siglo XIX. Un mercado sería eficiente si el conjunto de las informaciones pertinentes para la evaluación de los activos financieros se reflejara de inmediato en las cotizaciones o precios. Un mercado de esas características integra instantáneamente las consecuencias de los acontecimientos pasados y refleja con precisión las expectativas respecto a los acontecimientos futuros. De esa guisa, el precio de un activo financiero es en cada momento una estimación no sesgada de su valor intrínseco. De ello resultaría que es imposible prever sus variaciones futuras ya que los acontecimientos conocidos o anticipados han sido integrados en el precio actual, sólo un acontecimiento imprevisible podría modificarlo y esa modificación se produciría, además, instantáneamente. Teóricamente, la competencia es tal entre los distintos inversores que, rápidamente, todo activo financiero se cotizaría a su «justo» precio, el cual depende de las características y del riesgo.

En consecuencia, cualquier inversor puede confiar en el mercado y escoger las características y el nivel de riesgo deseado. Es decir, nadie puede *ganar* al mercado.

La principal consecuencia práctica de la eficiencia informacional de los mercados financieros es que descarta la posibilidad de prever el comportamiento de los cursos de los activos. A la luz de la hipótesis de eficiencia ningún método de análisis es capaz de extraer nueva información mejor que la del mercado pues los precios de los activos reflejan toda la que está disponible. El concepto de mercado informacional eficiente suscita consecuencias muy importantes en relación a la práctica de la gestión de carteras: sólo los inversores que disponen de información privilegiada pueden realizar ganancias anormales de forma continuada. No obstante, incluso en esta situación los rendimientos anormales tenderían a desaparecer rápidamente como en cualquier situación de competencia perfecta: el comportamiento del inversor privilegiado, por información o por la elaboración de un nuevo método de selección de cartera, será imitado antes o después (su agente de bolsa o su banquero practicarán el *front running* en beneficio propio).

Racionalidad de los actores

Como consecuencia de la gran volatilidad constatada de magnitudes macrofinancieras –tipos de interés, tipos de cambio, índices de bolsa, etc.– muchos economistas han puesto en duda la racionalidad del comportamiento de los operadores y la capacidad de los mercados financieros para evaluar correctamente los activos cotizados.

Desde el punto de vista de la racionalidad de los agentes económicos un mercado es eficiente si el precio de los activos refleja la esperanza de ingresos futuros a los que dan derecho. En la jerga actual se dice que los mercados financieros son eficientes si los precios de los activos cotizados son únicamente función de las expectativas racionales que tienen los inversores respecto a sus ingresos futuros. La racionalidad de los actores y la eficiencia de los mercados vistas así suscitan dudas dando lugar a una seria reconsideración.

En primer lugar, es evidente que la especulación en los mercados financieros amplifica considerablemente la variabilidad de beneficios, tanto al alza como a la baja, allende lo que cabría esperar de expectativas formadas racionalmente basándose en los determinantes fundamentales de los valores cotizados.

Keynes anticipó que el comportamiento irracional de los inversores guarda cierta semejanza con los «concursos de belleza» en los que los participantes deben escoger la chica más guapa de forma que el premio se le entrega al que acierta según los criterios de la mayoría y no según sus propias preferencias. Cada participante debe adivinar los gustos de los otros de forma que cada uno aplica su inteligencia a adivinar qué piensa la media de lo que será la preferencia de la media. De forma similar, la especulación respecto a la especulación de los otros operadores añade más varianza a la varianza normal de las cotizaciones del mercado y engendra burbujas especulativas embrollando la interpretación racional del mercado. Esta «sobre-varianza» al no tener relación con las expectativas racionales respecto a los ingresos futuros provoca que el mercado no sea eficiente.

Los modelos examinados en los experimentos propios a la economía conductual testimonian que los mercados financieros son netamente menos eficientes que los de bienes y servicios. Sobra decir, mientras que los mercados no financieros de doble subasta –en los que hay agentes que ofertan y demandan– muestran un elevado nivel de eficiencia, en los mercados financieros los fenómenos de burbuja seguidos de *krach* caracterizan su ineficiencia. Ello lleva a que actualmente se estudie la evaluación precisa de los efectos en los mercados financieros de los factores sicológicos propios a los agentes, incluidas sus capacidades cognitivas al respecto pues se ha constatado que tienen ciertas dificultades para aplicar un razonamiento probabilista bayesiano. La constatación es importante por partida doble. En gestión de cartera, lo ideal sería guiarse por los modelos de finanza conductual en lugar de los modelos financieros racionales. Además, respecto a la organización de los mercados financieros las susodichas constataciones justificarían una reglamentación más estricta de los mercados.

Riesgo individual y riesgo sistémico

La utilidad de los mercados financieros proviene de que permiten compartir y diversificar los riesgos así como transferirlos a quienes están más dispuestos o son más capaces de asumirlos y soportarlos. Por otra parte, permiten movilizar el ahorro hacia las asignaciones más rentables y productivas manteniendo la liquidez del conjunto. Estas funciones conllevan transacciones voluminosas. La cuestión es saber si la industria financiera que asegura estas funciones lo hace de forma eficaz.

En una especie de ajuste de cuentas propiciado por la desorientación intelectual y la pérdida de referencias seguras que la crisis ha traído consigo, no ha faltado quien culpara a los modelos matemáticos de sostener los productos financieros que sirvieron a camuflar la transferencia de riesgos creando tal opacidad que finalmente estalló sin que nadie pudiera verlo venir. Pero lo cierto es que inflando el papel de los modelos matemáticos algunos evitan reflexionar respecto a los aspectos económicos de la crisis. Y es que el problema se sitúa en otro nivel. La diversificación de las carteras, que minimizan los riesgos individuales, acrecienta el riesgo sistémico creando nuevas interdependencias entre los mercados al generar factores de desestabilización colectiva que arrastran a una espiral perversa a los bancos, que se contaminan unos a otros, y provocan un racionamiento o peor aun una sequía del crédito a particulares y Estados con el correspondiente impacto mortal en la economía real.

El caso de LTCM, como el más reciente de Lehman Brothers, revelan también las fuertes interdependencias de las instituciones financieras, actualmente conectadas por una red compleja de relaciones de contrapartida parecidas a una telaraña o red: cuando se tira de un hilo todo se mueve y el contagio es inevitable.

Otro ejemplo de estas interdependencias perversas surge en la finanza moderna por la actuación de superordenadores (*High Frequency Trading*) que se enfrentan en cada instante siguiendo las órdenes de algoritmos secretos que intercambian infinidad de órdenes de compra y de venta. Inmediatamente anuladas en un gigantesco combate colectivo que muy pocos dominan y que escapan a los reguladores, al no disponer de los mismos medios, incapaces de vigilarlos. Durante el misterioso *krach* del 6 de mayo 2010 el índice Dow Jones perdió el 10 por ciento en pocos minutos antes de normalizarse de nuevo.

La crisis de las *subprime,* lejos de tratarse de un fenómeno sin precedentes, como a veces se ha dicho, repitió un esquema familiar para los economistas compartiendo múltiples rasgos con otras crisis sufridas recurrentemente antes de la aparición de los modelos matemáticos y de cualquier «producto derivado». En finanzas, los modelos matemáticos sirven para medir y cuantificar el riesgo que corren los inversores. En este sentido son instrumentos de ayuda a la decisión. Pero salvo raras excepciones ningún banco ni fondo de inversión fundamenta una decisión mayor en una fórmula matemática. La decisión de los bancos de inversión estadounidenses de invertir masivamente en créditos arriesgados (las *subprimes*) no fue dictada por ningún modelo matemático sino por la búsqueda de rentabilidad creciente.

Pero incluso si los modelos matemáticos no provocaron la crisis, ésta ha puesto de relieve un cierto número de fallos en la gestión y la modelización de los riesgos en los bancos, agencias de notación, sistemas de regulación e instituciones financieras ¿Se trata de un fallo de los métodos cuantitativos, de una incorrecta utilización de dichos métodos o de la subutilización de los métodos disponibles?

La finanza es una disciplina esencialmente cuantitativa. Los cálculos de beneficios y pérdidas de las inversiones, de intereses de los préstamos, etc., recurren a las matemáticas. Las cosas se complican cuando la atención se centra no tanto en los beneficios y pérdidas pasadas como en las futuras: en ese caso hay que cuantificar la incertidumbre, con ayuda de la estadística matemática, que afecta a los movimientos futuros de precios.

Crisis recurrentes y endógenas

El enfoque puramente estadístico del riesgo financiero tiene sus límites. En efecto, la representación de un precio como un proceso aleatorio exógeno cuyas propiedades estadísticas –volatilidad y correlaciones– son estables equivale a suponer una liquidez infinita del mercado capaz de absorber el flujo de compras y ventas sin modificar la dinámica de los precios. Bajo este enfoque, hemos visto que las fluctuaciones aleatorias de precios resultan de la llegada –asimismo aleatoria– de nuevas informaciones (económicas u otras) que el mercado integra en los precios (eficiencia informacional de los mercados) que es la versión financiera de la mano invisible de Adam Smith: el mercado fija el precio de los activos a su «justo valor».

La elevada volatilidad de precios con relación a factores económicos fundamentales así como la existencia de saltos bruscos en los precios son difíciles de conciliar con la hipótesis de que esos precios reflejan una información menos volátil. Pero una ilustración más dramática del derrumbe de la eficiencia es la recurrencia de crisis y *krachs* en bolsa, momentos claves de la historia financiera en los que la liquidez del mercado no acude a la cita.

Un caso flagrante de lo que puede suceder cuando no se toma en cuenta la liquidez fue el episodio que condujo al *krach* del 19 octubre 1987 (caída del 22,6 por ciento del índice Dow Jones Industrial, 45,8 por ciento en Hong Kong, etc.). Ninguna noticia económica, ninguna información que pudiera integrarse en los precios explican el *krach*, se produjo por simples estrategias de gestión de los operadores basándose en el modelo Black-Scholes-Merton.

Estos fenómenos, bastante difíciles de conciliar en el marco de la teoría de mercados eficientes, muestran el carácter endógeno de las crisis financieras y la importancia de la retroacción de las estrategias de inversión sobre el comportamiento de los precios. El precio no es un dato exógeno del paisaje en el que evolucionan los actores financieros sino el resultado del consenso de dichos actores y de su comportamiento colectivo. Peor aún, la conjunción de los acontecimientos raros y los efectos de retroacción puede amplificar los riesgos que hundieron a LTCM en 1998: no es humo de pajas, en pocos días se registraron pérdidas equivalentes al PIB de Portugal.

El *cisne negro* fue el desfallecimiento del pago de Rusia, lo que provocó un choque en los mercados de obligaciones. Los tipos de interés evolucionaron justo en el sentido opuesto a las anticipaciones de LTCM que vio su capital evaporarse en pocos días. La caída de LTCM golpeó a los principales bancos de negocios americanos. Fue necesaria la intervención del Banco Federal de Nueva York y una coalición de los grandes bancos de negocios de Wall Street para evitar una crisis sistémica.

Estos casos, al no ser excepcionales, muestran que un enfoque puramente estadístico no traduce bien la naturaleza del riesgo financiero: la volatilidad y la correlación no son datos fijados sino que resultan de la dinámica de oferta y demanda en los mercados, en respuesta a los propios movimientos de precios. También apunta a la importancia del riesgo de liquidez, mucho más difícil de modelizar y que no ha sido suficientemente integrado en los métodos cuantitativos de medida y gestión del riesgo utilizados por las instituciones financieras. Es tanto la naturaleza intrínseca de los mercados financieros y la ausencia de reglamentación preventiva como la tecnología matemática de los productos financieros lo que provoca las crisis. Que, no obstante, se producirían igualmente sin los métodos matemáticos aplicados a los derivados. Por otra parte, las opciones reales, montadas sobre una técnica matemática similar, no dan lugar a especulaciones ni han provocado ningún tipo de crisis (ver A. K. Dixit y R. S. Pindyck *Investment Under Uncertainty*, 1993; L. Trigeorgis *Real Options*, 1996; M. Amram y N. Kulatilaka *Real Options*, 1999).

Conclusión

La crisis así llamada de las *subprime* ha suscitado comprensibles interrogaciones respecto al papel de las matemáticas en la elaboración de los productos financieros. Este papel no debe cuestionarse aunque hay que conocer sus límites. En última instancia, la contribución de las matemáticas a la finanza se limita a una ayuda a la decisión y no podrá substituir la profesionalidad de los intervinientes en el mercado ni a una reglamentación pertinente.

La ecuación de Black-Scholes-Merton es solamente un instrumento y como tal debe manejarse por profesionales capaces. La ecuación contribuyó, sin duda alguna, a la expansión irracional de una cadena de transacciones adosadas a productos cuyo valor reposaba en última instancia en otros productos cuyo valor en el mercado real –inmobiliario– dependía, a su vez, de la solvencia de los compradores que habían solicitado créditos hipotecarios. Pero la ecuación en sí misma es un buen instrumento de cobertura del riesgo que solamente falla –como en el caso de Enron– cuando se le pide más de lo que pude dar de sí. Se puede culpar a quienes utilizaron la ecuación para justificar sus decisiones como a los *traders* que utilizaron programas informáticos sobre-reactivos, que llevaron a pérdidas desastrosas, sin olvidar la responsabilidad de teóricos de la eficiencia de mercados financieros que siguen sin dar el brazo a torce. La responsabilidad incumbe a quienes utilizan mal los instrumentos que los matemáticos ponen a su disposición aunque, ciertamente, muchos de estos sean conscientes de que las fórmulas instrumentadas subestiman el riesgo real. En realidad, el sector financiero no necesita menos matemáticas sino más y mejor adaptadas al comportamiento histórico de los mercados que observó Mandelbrot.

El sistema financiero y los productos que circulan son demasiado complejos para dejar su uso al albur de la simple intuición de *traders*, las matemáticas son imprescindibles para orientar la decision de los más sensatos. Otro problema, el más grave quizás, es la desregulación de mercados más allá de lo que precisa el flujo óptimo de bienes y servicios. Nuestro maestro Maurice Allais calculó hace muchos años, antes de la crisis del 2008, que las necesidades de financiación de la economía real se cubren en Bolsa en media hora diariamente. Y tanto es así que el resto del tiempo sólo sirve a la especulación y a un sistema de apuestas complejo respecto al comportamiento de los precios de activos de toda clase, incluidas apuestas sobre apuestas, cuyo resultado consolidado es que el 80 por ciento de *traders* pierden dinero.

Last but not least, no es cierto que los matemáticos no vieran venir el tsunami financiero. Cada cuatro años los matemáticos organizan un congreso internacional que, entre otras cosas, sirve para anunciar los premiados con la Medalla Fields. En el congreso de agosto 2002, en Pekín, Mary Poovery diagnosticó perfectamente el perverso comportamiento especulativo, completamente desconectado de la financiación de la economía real, en mercados dominados por productos financieros basados en complejos montajes matemáticos («Can numbers ensure honesty? Unrealistic expectations and the US accounting scandal», *Notices of the American Mathematical Society*, 50 (2003), pp. 27-35). La advertencia no pasó desapercibida para Warren Buffet que, apoyándose además en su conocimiento del sector, calificó a ciertos productos financieros de «armas de destrucción masiva».

Anexo

Partiendo del caso más sencillo –opción de compra europea respecto a una acción– las hipótesis básicas del modelo de Black-Scholes-Merton (BSM) que llevan a la ecuación de Black-Scholes (BS) son las siguientes.

Hipótesis respecto al activo:

H1) Existe un tipo de interés (r) o rendimiento sin riesgo, conocido de antemano y constante.

H2) Las variaciones continuas en el tiempo, al alza o a la baja, del precio (S) del activo subyacente a la opción (V) siguen un movimiento browniano geométrico (proceso de Wiener) con volatilidad y deriva constantes.

H3) La acción subyacente no paga dividendos entre el momento (t) de la evaluación de la opción y la fecha de vencimiento (T) de la misma.

Hipótesis respecto al mercado:

H4) No se puede obtener un beneficio sin riesgo, es decir, no hay posibilidad de arbitraje.

H5) No hay costes de transacción de ningún tipo, ni siquiera tasas o impuestos.

H6) El activo subyacente es perfectamente divisible y por tanto se puede comprar o vender cualquier parte del mismo, una centésima parte, verbigracia.

H7) No existe racionamiento en el mercado de capitales y es posible endeudarse en cualquier montante.

En modelos posteriores, más evolucionados, algunas de las precedentes hipótesis se relajan.

Con las susodichas hipótesis se llega a la ecuación de BS:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} = rV$$

Es ésta una ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales, como la ecuación del calor, que admite varias soluciones, las cuales pueden obtenerse por métodos numéricos o analíticamente. BS la resolvieron para el caso de las opciones de compra simples pero es aplicable a opciones más exóticas o cuando el subyacente lo constituyen varias acciones o impago de hipotecas.

¿Qué significa la ecuación? Describe la trayectoria temporal de la evolución del precio V (S, t) de un producto financiero llamado opción a partir del principio siguiente: si ese precio es justo nadie puede realizar un beneficio vendiéndolo a un precio diferente. Obsérvese que dicho precio V(S, t) depende del precio de la acción (S) y del tiempo (t). Puesto que se trata de una trayectoria temporal del precio de la opción, ésta tendrá distintos valores o precios «racionales» matemáticamente calculables en cada instante antes de que llegue a vencimiento. En consecuencia, la opción es una mercancía virtual completa y negociable hasta el vencimiento. Ello ha llevado a la negociación en cascada de dichas mercancías virtuales y a un crecimiento exponencial del sector financiero.

La suma de los tres términos del miembro izquierdo de la ecuación representa el rendimiento del inversor si se adquiere una opción cubriéndola según la prescripción de BSM. El miembro de la derecha significa el rendimiento del capital V si lo colocamos en el banco al tipo de interés r (sin riesgo) o compramos valores sin riesgo, por ejemplo, obligaciones del Estado que procuren la rentabilidad r. En un mercado eficiente la igualdad de ambos miembros de la ecuación se cumple. En aras de entender más profundamente el significado de la ecuación seguiremos una pedagogía paso a paso.

Supongamos que una acción del Banco Donald&Gil vale hoy 100 euros con una probabilidad del 50 por ciento de que mañana valga 101 y la misma probabilidad de que baje a 99 euros. Por sorprendente que pueda parecer, si esa información fuese correcta podríamos obtener un beneficio de medio euro por acción en un día. Para ello tendríamos que adquirir una opción de compra sobre dos acciones al precio anticipado de 100 euros mañana cada una. Simultáneamente pedimos prestada una acción durante 24 horas (a un familiar, por ejemplo, que no nos cobra intereses) y la vendemos a 100 euros. Al día siguiente, si la acción baja a 99 euros dejamos expirar la opción, que nos permite comprar la acción a 100 euros, y la compramos a 99 euros. Inmediatamente devolvemos la acción a quien nos la prestó y ganamos un euro en la operación, más que suficiente para pagar una pequeña comisión al prestamista si fuera necesario. Pero si el precio de la acción al día siguiente es 101 euros ejercemos nuestra opción y compramos dos acciones a 100 euros cada una. Devolvemos la acción que nos prestaron y ganamos un euro en la operación vendiendo la otra acción. Tanto si la acción sube como si baja, gracias a la opción de compra podemos ganar 1 euro.

A la acción del Banco Donald&Gil –que podría ser una tonelada de arroz o un barril de *Brent*– le llamamos «activo subyacente» a la opción de compra (que también puede ser de venta). Este principio de cobertura ha sido descubierto empíricamente varias veces en la historia de la finanza pero los primeros que calcularon matemáticamente su «justo valor» fueron BSM, aunque previamente Bachelier desarrolló una fórmula muy parecida.

En conformidad con el ejemplo precedente el justo valor de la opción de compra ejercible mañana sobre una acción a 100 euros vale 50 céntimos hoy. Es decir, las opciones tienen también un valor. Por tanto, si la información está disponible para todo el mundo a coste nulo, el corredor de comercio y bolsa nos vendería la opción por 50 céntimos o si no la guardaría para él y haría la misma operación que nosotros. En resumidas cuentas, nadie puede ser más listo que el mercado (comprando o vendiendo a precios que difieren del justo precio) a menos que disponga de información privilegiada. Suponiendo que el corredor se equivocara en la valoración del justo precio de la opción de compra y nos la vendiera a 49 céntimos el margen que nos quedaría para realizar beneficio es muy reducido, 1 céntimo ¿Ese pequeño beneficio compensa una inversión en la que hay elementos de incertidumbre? En efecto, para realizar 1 céntimo de beneficio –habiendo invertido 49 céntimos al comprar la opción– la previsión tiene que ser exacta. Quiere decirse, la acción tiene que subir a 101 dólares o bajar a 99: exactamente un dólar cualquiera que sea la dirección. Además, la probabilidad debe ser del 50 por ciento en cada caso (en el ejemplo presentado).

A diferencia de los inversores clásicos que fundamentaban sus decisiones en tendencias de los precios de los activos –al alza o la baja– en la teoría de las opciones lo que cuenta es la volatilidad, es decir, la amplitud de la variación en el precio. El método supone, por tanto, que la estimación de la volatilidad es exacta. Ahora bien, este punto es crucial y, en cierta medida, se oculta en la fórmula de BSM.

Pasemos ahora a la interpretación de los símbolos de la ecuación de BS. Supongamos que queremos saber el verdadero valor V(S t), el valor de mercado al precio justo, ni menos ni más, de una opción de compra para una acción del BDG por la que queremos pagar K (101 euros por ejemplo, precio de ejercicio del activo subyacente) en la fecha T (fecha de vencimiento, dentro de un año, por ejemplo). Nuestra intención no es estafar a nadie sino simplemente pagar el valor justo, la prima de seguro para cubrirnos del riesgo en la fluctuación del coste del subyacente en función del tiempo que falta para el vencimiento de la opción y el montante que estamos dispuestos a pagar para ejercer esa opción de compra si nos interesa. El valor de la opción de compra dependerá del precio S al que se cotice hoy la acción. Cuanto más elevado sea S mayor será la probabilidad de que sea superior al precio de ejercicio K en la fecha de vencimiento T. Pero el valor de la opción depende asimismo de cuánto tiempo (días por ejemplo, o minutos) falta entre el instante presente t y la fecha de vencimiento T (es decir T-t) Incluso si la opción no tiene ningún valor hoy porque el precio S de su cotización en bolsa está por debajo del precio de ejercicio K, cuanto más tiempo falte (T-t) para la fecha de vencimiento T habrá una probabilidad no nula de que el precio S (110 euros, por ejemplo) se sitúe por encima de K. Como nosotros queremos adquirir una opción para no pagar más de K euros (101) esa opción tendrá un precio.

Por tanto, en la fecha de vencimiento T, el valor de la opción de compra será nulo (si S, precio de la acción en ese momento es inferior al precio K que estamos dispuestos a pagar para comprar la acción) o valdrá S-K (puesto que nos interesa ejercer la opción de compra, o venderla) ya que el precio de la acción S, es superior, al que pagaremos, K, gracias al derecho que hemos adquirido comprando la opción en el momento t, hace un año, por ejemplo. Es decir, pagamos K (101 euros) para comprar la acción y la revendemos por S (110 euros): ganancia neta S-K (9 euros). Que será también el valor teórico o precio de la opción. BSM han probado que (para cualquier tiempo t, anterior a la fecha de vencimiento T) existe un coste, un precio justo V(S, t) que corresponde al valor del mercado de la opción. Es un resultado sorprendente en la medida que un inversor que anticipe un alza del precio de la acción, por ejemplo, no evaluaría a priori el coste de la opción de la misma forma que otro inversor que anticipara una bajada. Sin embargo, BSM, y ahí sí que intervienen las matemáticas, han alcanzado su resultado –que existe un precio justo V(S, t)– eliminando el riesgo (o la incertidumbre) utilizando un principio de cobertura muy elaborado, de tipo dinámico, mediante el cual el inversor ajusta permanentemente su cartera al precio S y al instante t. En consecuencia, inversores que operan a la baja o al alza pueden ponerse de acuerdo respecto al precio justo de la opción siempre que utilicen el mismo modelo de volatilidad.

BSM encontraron la solución gracias a una idea tomada de Bachelier. En efecto, propusieron un modelo de cotización de la acción «intuitivamente evidente» tan evidente que sería difícil rechazar, según ellos. Según su enfoque, las variaciones del precio de una acción se descomponen en una tendencia al alza o a la baja rodeada de ligeras variaciones aleatorias (+, -) Sólo la amplitud de estas fluctuaciones, la volatilidad, medida por un parámetro sigma (σ) es lo que influye en el precio de la opción para cada tiempo t y precio S. Ahora bien, la distribución normal de probabilidad, o ley de Laplace-Gauss, permite calcular la probabilidad de fluctuación respecto al valor central. Por ejemplo, la probabilidad de que el precio baje más de un sigma es 15,8 por ciento, bastante alta, pero la probabilidad de que el precio baje más de dos sigmas es pequeña, 2,2 por ciento.

Todo proceso estocástico equivalente al lanzamiento de una moneda, incluso sesgada, a cara o cruz siempre que se efectúe una infinidad de veces (en la práctica, muchas veces) de forma independiente se distribuye normalmente. En Bolsa, la cotización de una acción es un flujo ininterrumpido de «más» y de «menos» –o de cara y cruz– indicando la pequeña variación instantánea del precio al alza o a la baja.

El tercer paso importante que dieron BSM fue partir del principio de que no se puede vencer al mercado. Contrariamente a los modelos de inversión precedentes que enfocaban la cobertura como una estrategia de enriquecimiento. Quien cubra su inversion eliminando el riesgo obtendrá una tasa de rendimiento (r) igual a la de un inversor que compre la menos arriesgada de las inversiones, por ejemplo, bonos del Tesoro estadounidenses a treinta años (verbigracia, si la inversion es V, obtendrá rV). Con lo cual se cierra el círculo y se llega a la ecuación de BS.

J. J. R. C. y G. de la D.